حساب أعمال القوى

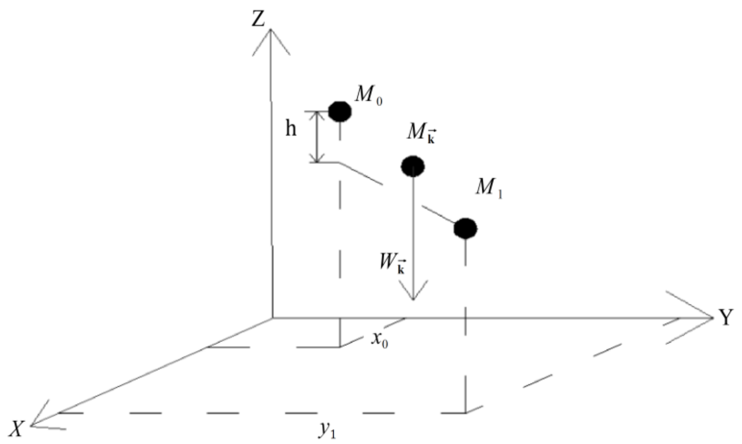
التحريك

د.اسكندر عمجة

نظري 06
S.P 18
05
2/11/2015
RBC HAMAK
فريق الكريات الحمراء التطوعي

عمل قوة الثقالة لجسيم مادي

نعد جسيماً ماديا M_k خلال حركته على منحني تحت تأثير قوة ثقالته W_k التي تنقله من الموضع $M_0(x_o, y_0, z_0)$ إلى الوضع $M_1(x_1, y_1, z_1)$ بدلالة جملة محاور إحداثية $T(OXYZ)$ فيها المحور OZ شاقولي نحو الأعلى:



لحساب عمل قوة الثقالة نسقط الجملة على عدة محاور:

$$F_X = 0 \qquad F_Y = 0 \qquad F_Z = -W_k$$

$$w_{W(M_0\to M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} -W_k dz_k = \int_{z_0}^{z_1} -W_k dz_k$$

$$w_{W(M_0\to M_1)} = -W_k(z_{1k} - z_{0k}) = W_k(z_{1k} - z_{0k})$$

$$w_{W(M_0\to M_1)} = \pm W_k(z_{1k} - z_{0k})$$

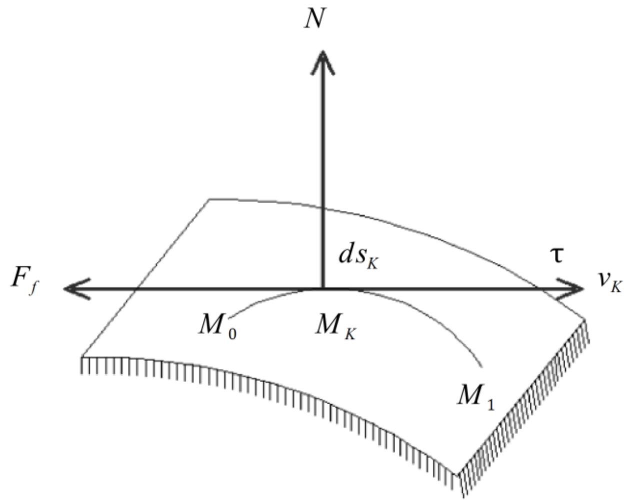
حيث h_k تمثل الانتقال الشاقولي للجسيم M_k:

فإذا كان الموضع M_1 على سوية أعلى من سوية الموضع M_0 كان الانتقال $\Delta z_{01k} < 0$ فيكون العمل **سالباً مقاوماً** وإذا كانت إزاحة الإنتقال $\Delta z_{01k} > 0$ كان العمل **موجباً محركاً**.

لا علاقة لعمل قوة الثقالة بشكل المسار الذي ينتقل عليه هذا الجسيم وتدعى القوة التي تمتاز بهذه الخاصية بالقوة المحافظة.

عمل قوة الاحتكاك

نعد جسيماً مادياً M_k يتحرك على مسار خشن معامل الاحتكاك فيه هو f من الموضع M_0إلى الوضع M_1بدلالة جملة محاور إحداثية $M_k \tau n$ فيها المحور τ باتجاه الحركة ويؤثر على الجسيم المادي خلالها قوة الاحتكاك $(F_f = f.N)$ التي تعاكس جهة الحركة و N رد فعل ناظمي كما في الشكل:



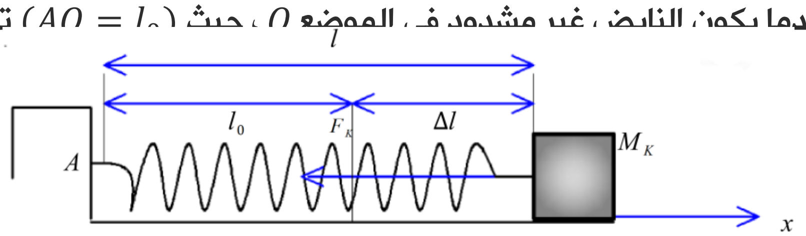
$$w_{W(M_0 \to M_1)} = -\int_{M_0}^{M_1} F_k^{\tau}.ds_k$$

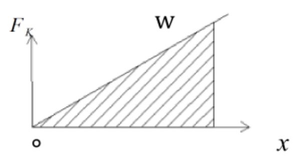
تدل الإشارة السالبة على أن القوة تعاكس الانتقال منه عمل قوة الإحتكاك هو عمل مقاوم وإذا بقيت القوة ثابتة كان عندها:

$$w_{W(M_0 \to M_1)} = -\int_{s_0}^{s_1} f.N.ds_k = -\boldsymbol{f.N}\int_{s_0}^{s_1} \boldsymbol{ds_k} = -\boldsymbol{f.N(s_{1k} - s_{0k})}$$

عمل قوة المرونة

نثبت طرف نابض لولبي عديم الكتلة بنقطة A في حائط شاقولي ونصل طرفه الآخر بجسيم مادي M_k يستطيع الحركة على مستوي أفقي أملس ويتزن عندما يكون النابض غير مشدود في الموضع O حيث $(AO = l_0)$ تمثل طول النابض غير المشدود كما في الشكل:





نختار الحركة على المحورAXينطبق على النابض ونحرف الجسيم عن وضع التوازن بشد النابض حتى طول $(OM_k = \Delta l)$فتؤثر على الجسيم المادي بقوة مرونة النابض المتجهة دوماً نحو الموضع O **وتبعاً لقانون هوك يتناسب مقدار هذه القوة طرداً مع استطالة النابض** $F_k = k\Delta l$

ومنه $\Delta l = l - l_0 = x$ وعليه $F_k = k.x$

حيث k ثابت النابض.

فالعمل الذي تقوم به القوة F_kالناتجة عن النابض المرن خلال انتقال الجسيم المادي من الموضعM_2 إلى الموضع M_1ينتج بالتعويض في علاقة العمل:

$$F_y = F_z = 0 \qquad , \qquad F_x = -F_x$$

$$w_{W(M_0\to M_1)} = -\int_{x_0}^{x_1} k.x.dx = \frac{k}{2}(x_1 - x_2)$$

حيث تمثلx_0 الاستطالة الابتدائية ويرمز لهاΔl_{in} في حين تمثل x_1 الاستطالة النهائية ويرمز لها Δl_{fin}عندئذ تصبح علاقة العمل:

$$\boldsymbol{w_{W(M_0\to M_1)} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)}$$

بالتالي عمل قوة المرونة يساوي إلى نصف حاصل جداء ثابت المرونة k بالفرق بين مربعي الاستطالة الابتدائية والاستطالة النهائية لنابض مرن.

ويكون العمل موجباً عندما $\Delta l_{in} > \Delta l_{fin}$ أي عندما يتحرك الجسيم نحو وضع الاتزان.

العلاقة الأخيرة صحيحة حتى لو لم يكن انتقال الجسيم مستقيماً ويمكن الوصول لنتيجة مماثلة لعلاقة العمل وذلك من مخطط تحولات F_k بدلالة x

$$\boldsymbol{w_{W(M_0\to M_1)} = -\frac{1}{2}(F_{0k} - F_{1k})x_{01}}$$

مسألة: /مبدأ الدفع وكمية الحركة/مبدأ العمل والطاقة الحركية/

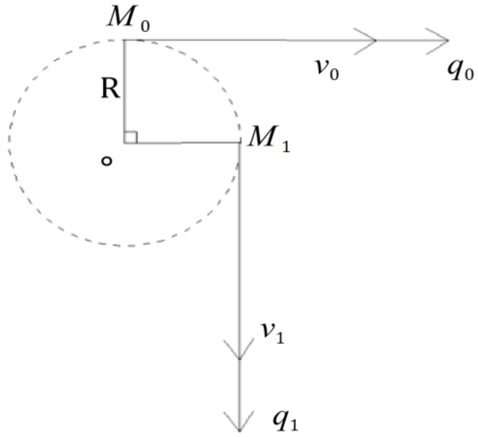
جسم كتلته m

المعطيات: $w = const$

المطلوب:

1- عين دفع القوة المؤثرة على الجسيم في الفترة الزمنية التي يقطع خلالها ربع محيط دائرة.

2- عمل القوة F



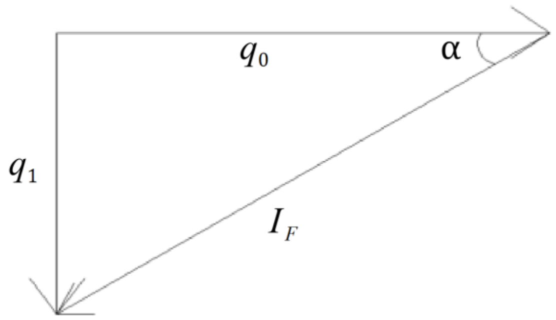
الحل:

يحسب دفع القوة من علاقة مبدأ الدفع وكمية الحركة:

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \vec{I}_F$$

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_0 + \vec{I}_F$$

لكن $v_1 = v_0 = w.R$



من مثلث المتجهات نجد: $I_F = \sqrt{[(mv_0)^2 + (mv_1)^2]}$

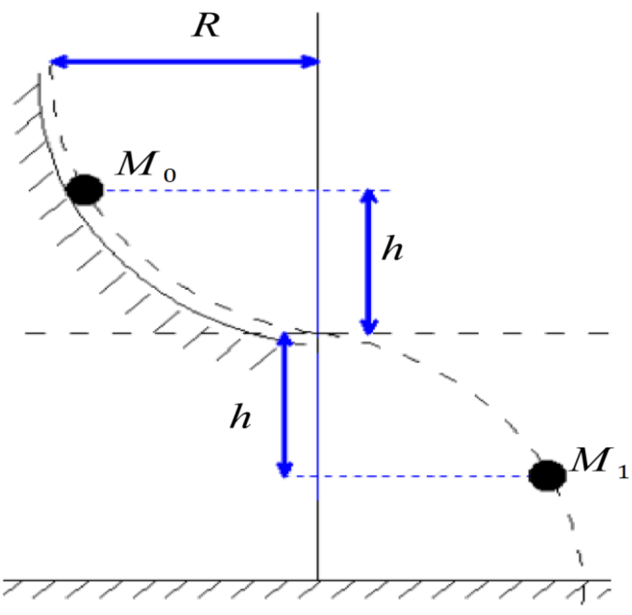
$$I_F = \sqrt{[m^2w^2R^2 \ + m^2w^2R^2]} = \sqrt{2}\, mwR$$

ويميل بزاوية α عن الأفق: $\tan(\alpha) = \frac{\vec{q}_1}{\vec{q}_2} = .. \Rightarrow \alpha = 225$

أما عمل القوة F فيحسب من علاقة تغير الطاقة الحركية:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_F$$
$$W_F = o$$

مسألة: مسار مستوي/مسار أملس/



المطلوب: عين ارتفاع h فوق المماس

لكي توضع عنده كرة ثقيلة

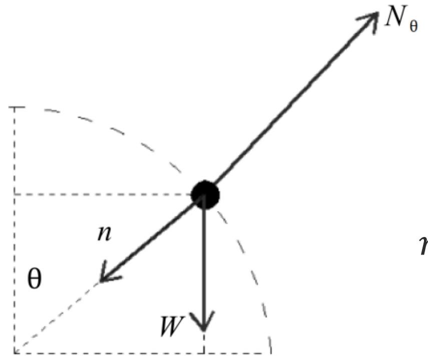
على المنحدر الأملس بحيث

تنطلق مبتعدةً عنه عند النقطة M

الواقعة على نفس المسافة h عند المماس.

الحل:

بما أن حركة الجسم المقيد تصبح حرة عند M_1 تحدد علاقة قوة القيد من تطبيق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم عند M_1 في اللحظة الزمنية المدروسة:



$$m\vec{A}\theta = \vec{N}\theta + \vec{W}$$

بإسقاطها على الناظم باتجاه التسارع الناظمي:

$$mA^n\theta = -N_\theta + W\cos\theta$$

$$\frac{v_\theta^2}{\rho_\theta} = -N_\theta + W\cos\theta$$

$$N_\theta = -\frac{mv_\theta^2}{R} + mg\cos\theta \ldots 1$$

قوى القيد تنعدم عندما تؤول الحركة من مقيدة إلى حرة

بما أن الجسيم يترك مساره عند الزاوية θ :

$$N_\theta = 0$$

$$\cos\theta = \frac{oC}{oM} = \frac{R-h}{R}$$

$$mg\cos\theta = \frac{R-h}{h}$$

$$\frac{1}{2}mv_\theta^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_N + W_W$$

لكن $v_0 = 0$ و $W_N = 0$

$$\frac{1}{2}mv_\theta^2 = W_W = mgH = mg2h$$

$$v_\theta^2 = 4gh$$

بالتعويض في العلاقة 1 :

$$0 = -\frac{m}{R}.4.g.h + m.g.\frac{R-h}{R}$$

$$h = \frac{R}{5}$$